

湖北省七市（州）教研协作体 2021 年高三年级 3 月联考

数学参考答案

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	B	C	A	D	C

二、多项选择题

题号	9	10	11	12
答案	AD	CD	BC	BCD

三、填空题

13. $-\frac{3}{4}$

14. 3

15. 1.26

16. $(1, \sqrt{5}]$

四、解答题

17. (1) 因为 $A+B+C=\pi$, 所以 $A+C=\pi-B$, 由 $4\cos(A+C)+2\cos 2B+3=0$,
 可得 $-4\cos B+2(2\cos^2 B-1)+3=0$, 即 $4\cos^2 B-4\cos B+1=0$, 3 分
 得 $\cos B=\frac{1}{2}$, 因为 $0<B<\pi$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 5 分

- (2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$,
 即 $48=64+BD^2-2\times 8\times BD\times \frac{1}{2}$, 即 $BD^2-8BD+16=0$, 解得 $BD=4$. 7 分

所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}=2\times \frac{1}{2}\times AB\cdot BD\sin B=2\times \frac{1}{2}\times 8\times 4\times \frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$. 10 分

18. (1) 因为 $\begin{cases} a_1+a_3=10 \\ S_5=35 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} a_1+d=5 \\ a_1+2d=7 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1=3 \\ d=2 \end{cases}$, 2 分
 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n+1$. 4 分

- (2) 由(1)得: $3b_1+5b_2+7b_3+\dots+(2n+1)b_n=1+(2n-1)2^n$, ①
 所以 $3b_1+5b_2+7b_3+\dots+(2n-1)b_{n-1}=1+(2n-3)2^{n-1}(n\geq 2)$, ②
 两式相减得: $(2n+1)b_n=(2n+1)2^{n-1}(n\geq 2)$, 所以 $b_n=2^{n-1}(n\geq 2)$, 7 分
 又由①式得 $b_1=1$, 适合上式, 所以 $b_n=2^{n-1}(n\in N^*)$. 8 分

所以 $\frac{1}{a_n\cdot(\log_2 b_{2n+4})}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$, 10 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{6n+9}$. 12 分

19. (1) 因为 $ABCD$ 是直角梯形, $AB\parallel DC$, $\angle BAD=90^\circ$, 所以 $AD\perp DC$,
 又因为 $PD\perp DC$, $PD\cap AD=D$, 所以 $CD\perp$ 平面 PAD ,
 又因为 $PA\subset$ 平面 PAD , 所以 $CD\perp PA$, 2 分

取 CD 的中点 E ，连接 BE ，在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $BC=2$ ， $CE=1$ ，可得 $BE=\sqrt{3}$ ，
 所以 $AD=\sqrt{3}$ ，又 $PD=2PA=2$ ，所以 $PA^2+AD^2=PD^2$ ，所以 $PA\perp AD$ ，
 又 $AD\cap CD=D$ ，所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ 。

4 分
5 分

(2) 以 A 为原点，分别以 AB ， AD ， AP 所在直线为 x ， y ， z 轴建立空间直角坐标系，
 则 $B(1,0,0)$ ， $D(0,\sqrt{3},0)$ ， $P(0,0,1)$ ，所以 $\overrightarrow{BP}=(-1,0,1)$ ， $\overrightarrow{BD}=(-1,\sqrt{3},0)$ ，

设平面 PBD 的法向量 $\mathbf{m}=(x,y,z)$ ，由 $\begin{cases} \overrightarrow{BP}\cdot\mathbf{m}=-x+z=0 \\ \overrightarrow{BD}\cdot\mathbf{m}=-x+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$ ，

得 $\begin{cases} -x+z=0 \\ -x+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$ ，令 $y=1$ ，得 $\mathbf{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$ ，

7 分

设 $M(x_0,y_0,z_0)$ ，由 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}(0<\lambda<1)$ ，得 $(x_0-1,y_0,z_0)=\lambda(-1,\sqrt{3},0)$ ，

所以 $M(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$ ，所以 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$ ， $\overrightarrow{AM}=(1-\lambda,\sqrt{3}\lambda,0)$ ，

设平面 PAM 的法向量 $\mathbf{n}=(x_1,y_1,z_1)$ ，由 $\begin{cases} \overrightarrow{AP}\cdot\mathbf{n}=0 \\ \overrightarrow{AM}\cdot\mathbf{n}=0 \end{cases}$ ，

得 $\begin{cases} z_1=0 \\ (1-\lambda)x_1+\sqrt{3}\lambda y_1=0 \end{cases}$ ，令 $x_1=\sqrt{3}\lambda$ ，

得平面 PAM 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(\sqrt{3}\lambda,\lambda-1,0)$ 。

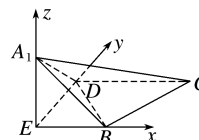
9 分

设二面角 $A-PM-B$ 的平面角为 θ ，

则有 $\cos\theta=\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{|\mathbf{n}||\mathbf{m}|}=\frac{3\lambda+\lambda-1}{\sqrt{7}\sqrt{(\sqrt{3}\lambda)^2+(\lambda-1)^2}}=\frac{4\lambda-1}{\sqrt{7}\sqrt{4\lambda^2-2\lambda+1}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$ ，

解得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=\frac{1}{2}$ ，因为 $0<\lambda<1$ ，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$ 。

12 分



20. (1) 椭圆的左右焦点分别为 $F_1(-c,0)$ ， $F_2(c,0)$ ，而双曲线 $C_2: x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的顶点分别为 $(-1,0)$ ， $(1,0)$ ，

所以 $c=1$ 。

1 分

又椭圆的上顶点为 $(0,b)$ ，而双曲线 $C_2: x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的一条渐近线为 $y=2x$ ，

则有 $\frac{|b|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，解得 $b=1$ 。

3 分

$\therefore a^2=1^2+1^2=2$ ，所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 。

4 分

(2) 设直线 l 的方程为 $x=ty-1$ ，(t 一定存在)，代入 $x^2+2y^2=2$ ，并整理得 $(t^2+2)x^2-2ty-1=0$ ，

$\Delta=4t^2+4(t^2+2)>0$ 恒成立，设 $M(ty_1-1, y_1)$ ， $N(ty_2-1, y_2)$ ，

则 $y_1+y_2=\frac{2t}{t^2+2}$ ， $y_1y_2=\frac{-1}{t^2+2}$ 。

5 分

设 $P(x_0, y_0)$ ，由 $\overrightarrow{F_2P}=\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}$ ，得 $\begin{cases} x_0-1=ty_1-2+ty_2-2 \\ y_0=y_1+y_2 \end{cases}$ ，

$$\text{即} \begin{cases} x_0 = t(y_1 + y_2) - 3 = -\frac{t^2 + 6}{t^2 + 2}, \\ y_0 = y_1 + y_2 = \frac{2t}{t^2 + 2} \end{cases}, \text{又点 } P \text{ 在椭圆 } C_1 \text{ 上, 故 } \frac{(t^2 + 6)^2}{2(t^2 + 2)^2} + \frac{4t^2}{(t^2 + 2)^2} = 1,$$

$$\text{即 } t^4 - 12t^2 - 28 = 0, \text{ 解得 } t^2 = 14 \text{ (舍负)}, \quad 8 \text{ 分}$$

因为满足 $\overrightarrow{F_2P} = \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}$ 的点 P 也在椭圆 C_1 上, 所以四边形 F_2MPN 是平行四边形,

设四边形 F_2MPN 的面积为 S , 则有

$$S = |F_1F_2| |y_1 - y_2| = 2\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = 2\sqrt{\frac{4t^2 + 4(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2}} = \frac{4\sqrt{2(t^2 + 1)}}{t^2 + 2}, \quad 11 \text{ 分}$$

$$\text{代入 } t^2 = 14, \text{ 得四边形 } F_2MPN \text{ 的面积 } S = \frac{\sqrt{30}}{4}. \quad 12 \text{ 分}$$

$$21. (1) \text{ 当 } n=2 \text{ 时, 一个系统有 } 3 \text{ 个电子元件, 则一个系统需要维修的概率为 } C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \quad 1 \text{ 分}$$

$$\text{设 } X \text{ 为该电子产品需要维修的系统个数, 则 } X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right), \quad \xi = 500X \quad 2 \text{ 分}$$

$$\therefore P(\xi = 500k) = P(X = k) = C_3^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3 \quad 4 \text{ 分}$$

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	0	500	1000	1500
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\therefore E\xi = 500 \times 3 \times \frac{1}{2} = 750 \quad 6 \text{ 分}$$

(2) 记 $2k-1$ 个元件组成的系统正常工作的概率为 p_k . $2k-1$ 个元件中有 i 个正常工作的概率

$$\text{为 } C_{2k-1}^i p^i (1-p)^{2k-1-i}, \text{ 因此系统正常工作的概率 } p_k = \sum_{i=k}^{2k-1} C_{2k-1}^i p^i (1-p)^{2k-1-i}. \quad 7 \text{ 分}$$

在 $2k-1$ 个元件组成的系统中增加两个元件得到 $2k+1$ 个元件组成的系统, 则新系统正常工作可分为下列情形:

$$(a) \text{ 原系统中至少有 } k+1 \text{ 个元件正常工作, 概率为 } p_k - C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1}; \quad 8 \text{ 分}$$

(b) 原系统中恰有 k 个元件正常工作, 且新增的两个元件至少有 1 个正常工作,

$$\text{概率为 } [1 - (1-p)^2] C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1}; \quad 9 \text{ 分}$$

(c) 原系统中恰有 $k-1$ 个元件正常工作, 且新增的两个元件均正常工作,

$$\text{概率为 } p^2 C_{2k-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^k. \quad 10 \text{ 分}$$

$$\text{因此, } p_{k+1} - p_k = p^2 C_{2k-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^k + [1 - (1-p)^2] C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1} - C_{2k-1}^k p^k (1-p)^{k-1}$$

$$= p^k (1-p)^k C_{2k-1}^{k-1} (2p-1)$$

故当 $p > \frac{1}{2}$ 时, p_k 单调增加, 增加两个元件后, 能提高系统的可靠性. 12 分

22. (1) $f'(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x}{x^2} (x - 1 + e^{-x})$, 1 分

易证当 $x \neq 0$ 时, $e^x > x + 1$, 则 $e^{-x} > -x + 1$, 即 $e^{-x} + x - 1 > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

(2) 由题意得 $\forall x > 0$, $\frac{e^x - 1}{x} - 2 \ln x \geq k$,

令 $F(x) = \frac{e^x - 1}{x} - 2 \ln x$, 要证: $\lambda > 1.1$, 即证 $F(x) > 1.1$.

$$F'(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x \cdot e^x - e^x - 2x + 1}{x^2},$$

令 $g(x) = x \cdot e^x - e^x - 2x + 1$, 则 $g'(x) = x \cdot e^x - 2$, $g''(x) = (x+1) \cdot e^x > 0$, 所以 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g'(0) = -2 < 0$, $g'(1) = e - 2 > 0$,

故 $\exists x_0 \in (0, 1)$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{2}{x_0}$. 6 分

所以 $\forall x \in (0, x_0)$, 有 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

$\forall x \in (x_0, +\infty)$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x) \geq g(x_0)$, $g(0) = 0$, $g(x_0) = x_0 \cdot e^{x_0} - e^{x_0} - 2x_0 + 1 = 2 - \frac{2}{x_0} - 2x_0 + 1 < 0$,

$g(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}} - 2 > 0$, 所以存在 $x_1 \in (x_0, \frac{3}{2})$, 使得 $g(x_1) = 0$,

即 $e^{x_1} = \frac{2x_1 - 1}{x_1 - 1}$, 且满足 $\forall x \in (0, x_1)$, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减;

$\forall x \in (x_1, +\infty)$, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增;

所以 $F(x) \geq F(x_1) = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} - 2 \ln x_1 = \frac{1}{x_1 - 1} - 2 \ln x_1$. 8 分

令 $h(x) = \frac{1}{x-1} - 2 \ln x$, 则 $h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x} < 0$, 故 $h(x)$ 单调递减,

又 $x_1 < \frac{3}{2}$, 所以 $h(x_1) > h(\frac{3}{2}) = 2(1 - \ln \frac{3}{2})$. 9 分

则只需证明 $2(1 - \ln \frac{3}{2}) > 1.1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < 0.45 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < e^{0.45} \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{20} < e^9$,

又 $e > \frac{8}{3} = 2.6$, 可先证明 $(\frac{3}{2})^{20} < (\frac{8}{3})^9$, 又 $3^5 = 243$, $2^8 = 256$, 则 $3^5 < 2^8$,

所以 $3^{30} < 2^{48} \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{21} < (\frac{8}{3})^9$, 而 $(\frac{3}{2})^{20} < (\frac{3}{2})^{21}$, 所以 $(\frac{3}{2})^{20} < (\frac{8}{3})^9 < e^9$, 证毕! 12 分

注: 关于 $2(1 - \ln \frac{3}{2}) > 1.1 \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < 0.45$ 的证明下面再给出一种证法:

由对数均值不等式 (需要证明) 得 $\sqrt{3 \times 2} < \frac{3-2}{\ln 3 - \ln 2}$, 即 $\ln 3 - \ln 2 < \frac{\sqrt{6}}{6}$,

又 $\frac{1}{6} < 0.45^2$, 所以 $\ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2 < 0.45$, 证毕!